



# 测量模型与潜变量分析

温忠麟

华南师范大学心理学院



# 提要

---

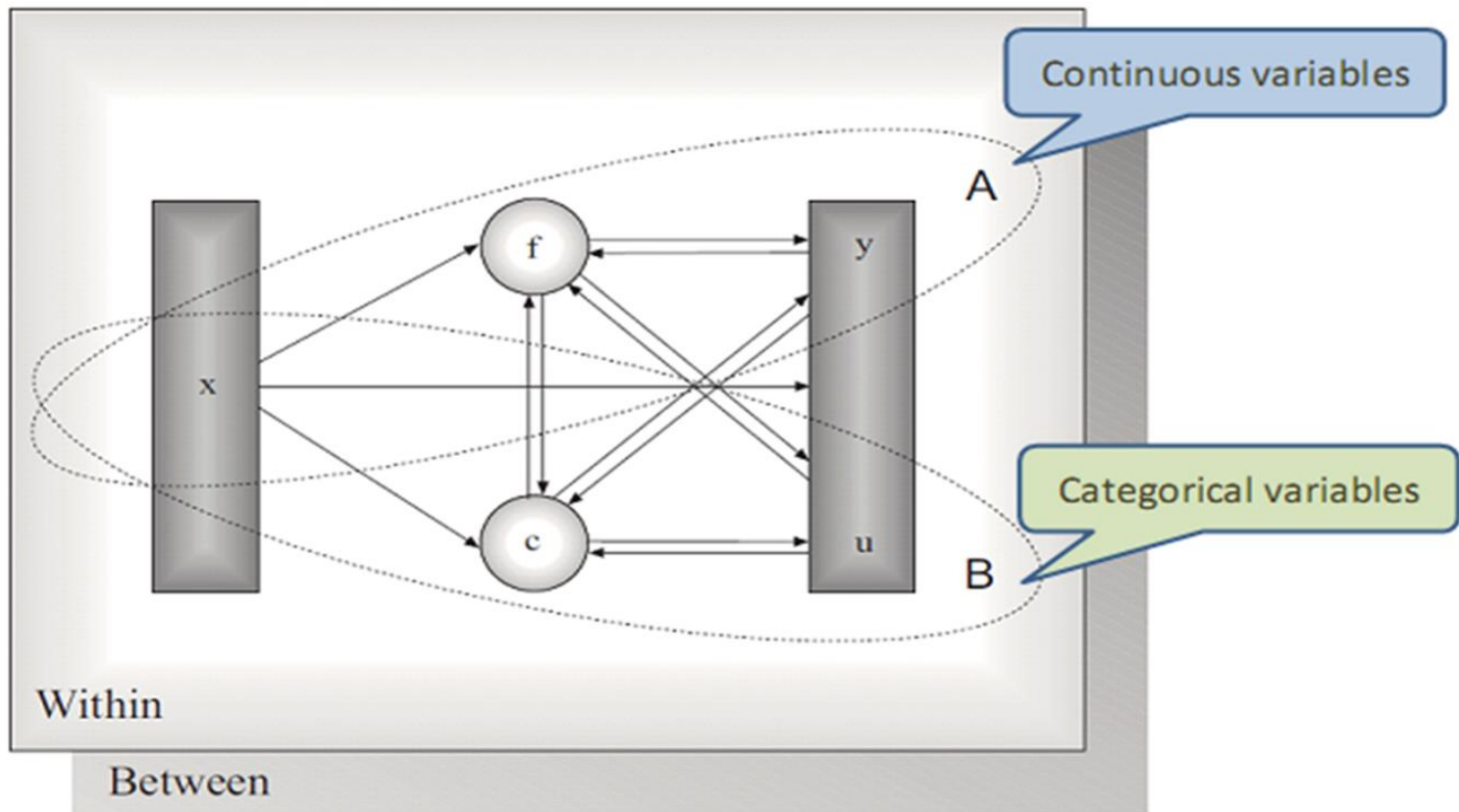
- 潜变量分析总览
- 因子分析：探索、验证与整合
- 结构方程建模
- 基于因子模型的信度计算
- 显变量分析的本质和适用场合
- 因果分析：理论分析+数据分析

# 潜变量分析总览

		显变量 (Manifest variables)	
		连续型 (Continuous)	类别型 (Categorical)
潜变量 (Latent variables)	连续型 (Continuous)	因子分析 (Factor analysis)	潜在特质分析 (Latent trait analysis)
	类别型 (Categorical)	潜在剖面分析 (Latent profile analysis)	潜在类别分析 (Latent class analysis)

Bartholomew, D. J., M. Knott, et al. (2011). *Latent variable models and factor analysis: a unified approach*. London, UK., John Wiley & Sons.

# Mplus的分析框架





# 量表与因子分析

---

- 心理量表或问卷：一个题目就是一个变量
- 探索性因子分析（**EFA**）是根据变量相关性大小将变量分组
- 每个组代表一个结构或一种心理特质
- 一个组的共同属性就是因子（**factor**）
- 因子被认为是造成该组变量变化的一个共同原因



---

调查某校初中一年级新生的情况，包括：

身高、体重、语文入学成绩、数学入学成绩、英语入学成绩、家庭人均年收入、家庭月均支出。



## 七个变量相关系数矩阵

---

	1	2	3	4	5	6	7
身高	1.00						
体重	.57	1.00					
语文	.11	.10	1.00				
数学	.08	.09	.50	1.00			
英语	.09	.12	.55	.48	1.00		
收入	.10	.13	.10	.09	.09	1.00	
支出	.09	.07	.09	.09	.08	.64	1.00

---



这七个变量中，下列变量之间相关系数较大：

---

身高与体重

三科入学成绩之间

家庭人均年收入与家庭月均支出

而其余的相关系数（绝对值）较小





这七个变量中，下列变量之间相关系数较大：


---

身高与体重——**身形**

三科入学成绩——**成绩**

家庭人均年收入与家庭月均支出

——**家庭经济状况**



设有  $p$  个标准化变量  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  (比如可以理解为一份智力测验  $p$  个题目的标准分), 它们受  $m$  个公共因子  $F_1, F_2, \dots, F_m$  (智力因素或智力结构) 的影响, 因子分析的数学模型可表示成如下形式:

$$Z_1 = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \dots + a_{1m}F_m + \varepsilon_1$$

$$Z_2 = a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \dots + a_{2m}F_m + \varepsilon_2$$

.....

$$Z_p = a_{p1}F_1 + a_{p2}F_2 + \dots + a_{pm}F_m + \varepsilon_p$$

其中  $F_1, \dots, F_m$  是公共因子 (以下在不会引起混淆时简称因子),  $\varepsilon_i$  是只和  $Z_i$  有关的特殊因子 (也称为误差项), 系数  $a_{ij}$  称为第  $i$  个变量  $Z_i$  在第  $j$  个因子  $F_j$  上的负荷 (loading), 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}$$

称为因子负荷矩阵。



## 正交因子模型假设

---

- 公共因子都是均值为**0**，方差为**1**的变量。特殊因子的均值为**0**。
- 各公共因子之间、特殊因子与公共因子之间、特殊因子与特殊因子之间均为零相关，即它们之间的协方差（或相关系数）等于零。



## ● 因子负荷的统计意义

因子负荷  $a_{ij}$  等于变量  $Z_i$  与因子  $F_j$  的相关系数  $r_{Z_i F_j}$

## ● 因子负荷矩阵 $A$ 中各行元素平方和的统计意义

记因子负荷矩阵  $A$  第  $i$  行元素的平方和为

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2, i = 1, 2, \dots, p$$

称为变量  $Z_i$  的共同度 (communality), 也称为公共因子方差。

$$1 = \text{var}(Z_i) = h_i^2 + \sigma_i^2$$

这说明变量  $Z_i$  的方差由两部分组成, 第一部分就是共同度  $h_i^2$ , 它度量了全部  $m$  个公共因子对变量  $Z_i$  方差的贡献, 反映了变量  $Z_i$  对公共因子的依赖程度。第二部分是特殊因子的方差, 称为特殊方差。



- 因子负荷矩阵  $A$  中各列元素平方和的统计意义

在因子载荷矩阵  $A$  中, 第  $j$  列元素的平方和记为  $g_j^2$ :

$$g_j^2 = \sum_{i=1}^p a_{ij}^2, (j = 1, 2, \dots, m) \quad (12.3)$$

$g_j^2$  表示第  $j$  个公共因子  $F_j$  对所有变量  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  的总影响或方差贡献, 它是  $F_j$  在全部公共因子中相对重要性的一个度量。



## 因子分析结果呈现

表 12-1 八门课程成绩在三个因子上的负荷

变量	因子 $F_1$	因子 $F_2$	因子 $F_3$	共同度 $h_i^2$	特殊方差 $\sigma_i^2$
代数( $Z_1$ )	0.187	0.933	0.053	0.908	0.092
几何( $Z_2$ )	-0.103	0.884	0.282	0.872	0.128
物理( $Z_3$ )	0.365	0.632	0.401	0.694	0.306
地理( $Z_4$ )	0.683	0.403	0.156	0.653	0.347
英语( $Z_5$ )	0.915	-0.048	0.151	0.863	0.137
语文( $Z_6$ )	0.107	0.144	0.964	0.962	0.038
化学( $Z_7$ )	0.815	0.187	0.240	0.758	0.242
历史( $Z_8$ )	0.493	0.236	0.620	0.683	0.317
方差贡献 $g_j^2$	2.403	2.327	1.662	6.391	1.609
方差贡献率	30.03%	29.08%	20.78%	79.89%	20.11%



## 结果解释

---

- 英语和化学在因子F1上的负荷较大，其次是地理，这些课程反映的共同能力是识记能力，可以将该因子解释为识记方面的能力。
- 代数和几何在因子F2上的负荷很大，物理也有较大的负荷，这些课程反映的共同能力是逻辑推理和运算能力，可以将因子F2解释为逻辑推理和运算能力。
- 在因子F3上有大负荷的是语文，其次是历史，这些课程反映的共同能力是语言和文字表达能力，可以将因子F3解释为语言和文字表达能力。
- 计算共同度、特殊因子方差和个因子的方差贡献并报告结果。



# 因子分析步骤

---

- 1. 计算相关矩阵**
- 2. 因子提取**
- 3. 因子旋转**
- 4. 计算因子得分**
- 5. 对因子命名并做出解释**





# 因子模型估计方法

---

- 主成份法 (**Principal Components**)
- 极大似然法 (**Maximum Likelihood**)
- 主轴因子法 (**Principal Axis Factors**)
- 最小二乘法 (**Least Square**)
- 广义最小二乘法 (**Generalized Least Square**) 等等

常用主成份法 (也是**SPSS**默认的方法)

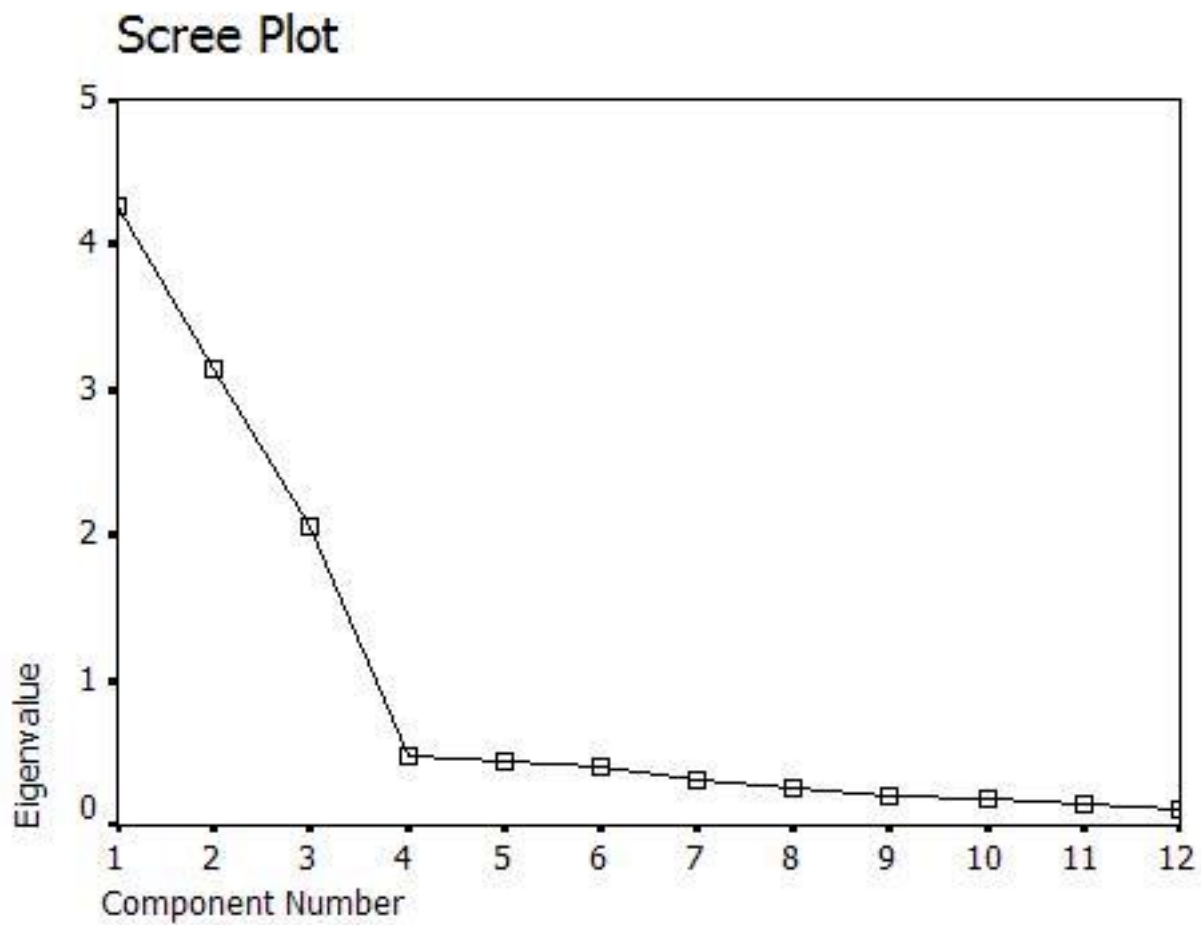


## 因子个数的确定

---

- 以 $R$ 的特征根（eigenvalue）是否大于1为标准，特征根大于1的特征根个数为提取的因子数。  
（SPSS默认）
- 参考 $R$ 的特征根的碎石图（scree plot）
- 使前 $m$ 个因子的方差贡献达到一个适当的比例，比如70%以上
- 根据专业知识指定因子个数
- 比较不同因子个数的模型，结合拟合指数和模型可解释性而定

# 碎石图





# 因子旋转方法

---

- 方差极大旋转 (**varimax**)
- 等方差极大旋转(**equamax**)
- 方差四次幂极大旋转(**quartimax**)等
- 当对因子作正交旋转后，因子的意义仍不能得到满意的解释时，可考虑对因子作斜交旋转（如**promax**）。这时，对应的变换矩阵不是正交矩阵，旋转后因子之间的相关系数不是零



# 因子得分

---

- 对每个被试计算他们的因子值，可以把因子得分作为因子（潜变量）的观测值
- 计算因子得分方法
  - 回归法（**SPSS默认**）
  - **Anderson-Rubin**方法
  - **Bartlett**方法



# 用SPSS做因子分析的策略

1. 做默认的主成份法因子分析，看多少个因子比较合适。
2. 指定因子个数再做一次主成份法分析，作方差极大旋转，计算因子得分。尝试解释因子。
3. 指定因子个数做极大似然法因子分析，作方差极大旋转。
4. 比较前两步得到的旋转后的负荷矩阵，看是否能将变量按同一种方式分组，即看因子能否用相同的变量来表征。
5. 另外指定一个因子个数，重复第**2**至**4**步，考察添加或删减的因子对方差的贡献大小，比较一下是否能更好地对因子做出合理的解释。
6. 如果方差极大旋转后的因子仍然不好解释，尝试其他正交旋转乃至斜交旋转。
7. 如果数据较多，可将它们一分为二（随机划分或奇偶划分），对每一半数



# 主成份法原理

考虑  $p$  个相关变量  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  的线性组合

$$Y_1 = b_{11}Z_1 + \dots + b_{1p}Z_p,$$

... ..

$$Y_p = b_{p1}Z_1 + \dots + b_{pp}Z_p,$$

所谓主成份就是满足下面条件的  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  :

- (1)  $Y_i$  的系数向量为单位长, 即  $b_{i1}^2 + \dots + b_{ip}^2 = 1, i = 1, \dots, p$  ;
- (2)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  的方差达到最大且互不相关。

第一主成份  $Y_1$  是一切系数为单位长的线性组合中方差最大者, 第二主成份  $Y_2$  是一切系数为单位长且与  $Y_1$  不相关的线性组合中方差最大者, 依次类推, 第  $k$  主成份  $Y_k$  是一切系数为单位长且与前  $k-1$  个主成份不相关的线性组合中方差最大者。

## 主成份法原理（续）

设  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$  是  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  的相关矩阵  $R$  的特征根 (eigenvalue), 即满足  $|\lambda I - R| = 0$ 。  $e_1, e_2, \dots, e_p$  为相应的标准正交化特征向量, 数学上可以证明, 第一主成份  $Y_1$  的系数向量就是  $e_1$ , 方差为  $\lambda_1$ , 第二主成份  $Y_2$  的系数向量是  $e_2$ , 方差为  $\lambda_2$ 。一般地, 第  $k$  主成份  $Y_k$  的系数向量是  $e_k$ , 方差为  $\lambda_k$ , 即

$$Y_k = e_{k1}Z_1 + e_{k2}Z_2 + \dots + e_{kp}Z_p, k = 1, 2, \dots, p,$$

其中  $e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kp})'$ 。而且, 对于方差有如下结果

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=1}^p \text{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^p \text{Var}(Z_i) = p,$$

从而第  $k$  主成份的方差占变量总方差的比例为  $\lambda_k/p$ 。如果前  $m$  个主成份的方差之和占总方差的比例很大 (比如超过 0.8), 我们就可以用它们近似解释原来变量的变化情况, 这就是主成份分析的思想。在因子分析中, 自然就想到将前  $m$  个主成份作为因子。不过, 我们要求因子是标准化变量, 所以因子与主成份相差一个倍数, 即

$$F_i = Y_i / \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, m。$$





## 利用因子分析结果做主成份分析

- 需要计算多少个主成份，在做因子分析时，就指定多少个因子，用主成份法提取因子，不作旋转。
- 得到因子得分后，用下式计算主成份  
主成份 = **SQRT(特征值)** × 因子得分



## EFA适用场合

---

- 对现有变量根据相关性大小分组
- 降维：用少量的因子（潜变量）代替原有变量做进一步的统计分析（如：回归分析、路径分析、聚类分析等）
- 编制量表（由表及里）：在没有明确的概念界定时，用于题目筛选，并确定量表维度
  - 访谈、草拟题目、试测
  - **EFA**筛选题目



## **EFA例子：**大学生对教师的课堂教学评价

- 我钦佩老师的工作态度和敬业精神
- 老师对讲课内容和方法做了精心准备
- 老师鼓励我们提问和发表个人想法
- 老师能够比较和评价各种理论或方法
- 老师能理论联系实际，案例生动

.....

- 我学会了如何学习该学科的方法
- 该课使我提高了分析相关问题的能力

通过**EFA**，不同国家所做的同类研究有相同或类似的**7-9**个因子：

态度、组织、清晰性、互动、内容、知识面、作业、效果、价值

# EFA的Mplus程序

TITLE: this is an example of an exploratory factor analysis

DATA: FILE IS ex4.1a.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y12;

ANALYSIS: TYPE = EFA 1 4;

OUTPUT: MODINDICES;

（默认旋转方法是**GEOMIN**斜交旋转）

## SUMMARY OF MODEL FIT INFORMATION

Model	Number of Parameters	Chi-Square	Degrees of Freedom	P-Value
1-factor	36	1055.754	54	0.0000
2-factor	47	672.258	43	0.0000
3-factor	57	341.268	33	0.0000
4-factor	66	25.799	24	0.3635

Models Compared	Chi-Square	Degrees of Freedom	P-Value
1-factor against 2-factor	383.496	11	0.0000
2-factor against 3-factor	330.990	10	0.0000
3-factor against 4-factor	315.469	9	0.0000

## EXPLORATORY FACTOR ANALYSIS WITH 4 FACTOR(S):

### MODEL FIT INFORMATION

Number of Free Parameters	66
Information Criteria	
Akaike (AIC)	15870.755
Bayesian (BIC)	16148.919
Sample-Size Adjusted BIC	15939.431
( $n^* = (n + 2) / 24$ )	
Chi-Square Test of Model Fit	
Value	25.799
Degrees of Freedom	24
P-Value	0.3635
RMSEA (Root Mean Square Error Of Approximation)	
Estimate	0.012
90 Percent C.I.	0.000 0.039
Probability RMSEA $\leq$ .05	0.995
CFI/TLI	
CFI	0.999
TLI	0.996
SRMR (Standardized Root Mean Square Residual)	
Value	0.012

### GEOMIN ROTATED LOADINGS (\* significant at 5% level)

	1	2	3	4
Y1	0.637*	0.008	0.074	-0.021
Y2	0.808*	0.022	-0.005	0.041
Y3	0.631*	-0.042	-0.058	-0.028
Y4	0.027	0.646*	-0.002	-0.018
Y5	-0.029	0.760*	-0.023	0.017
Y6	0.010	0.674*	0.030	-0.012
Y7	-0.006	0.003	0.734*	0.018
Y8	-0.040	0.002	0.727*	-0.016
Y9	0.049	-0.007	0.707*	-0.001
Y10	-0.037	0.006	-0.010	0.692*
Y11	0.004	0.013	0.001	0.791*
Y12	0.035	-0.036	0.008	0.658*

### GEOMIN FACTOR CORRELATIONS (\* significant at 5% level)

	1	2	3	4
1	1.000			
2	-0.039	1.000		
3	0.007	0.029	1.000	
4	-0.002	-0.121*	-0.028	1.000



# 验证性因子分析

---

- 验证性因子分析（**CFA**）用于验证量表的结构（**structure**，也称为构念），包括题目与因子的从属关系，因子之间关系等
- 从量表角度看，因子就是所要测量的心理特质或者抽象概念，量表题目（指标）是概念外延（集合）的代表性子集
- 使用相同的量表相当于使用相同的操作性定义
- 概念和结构先行编制的量表（由里及表），应当使用**CFA**进行检验





# 潜变量与指标

---

## ● 外表自我概念

- 我长相好。
- 我有张漂亮的面孔。
- 我样子长得难看。
- 我有一副好身材。
- 别人认为我的样子好看。

(1-完全不吻合, ..., 6-完全吻合)



# 结构与维度（自我概念为例）

---

- 学业自我概念

- 数学

- 语文

- 非学业自我概念

- 外貌（身材、相貌）

- 情绪稳定性

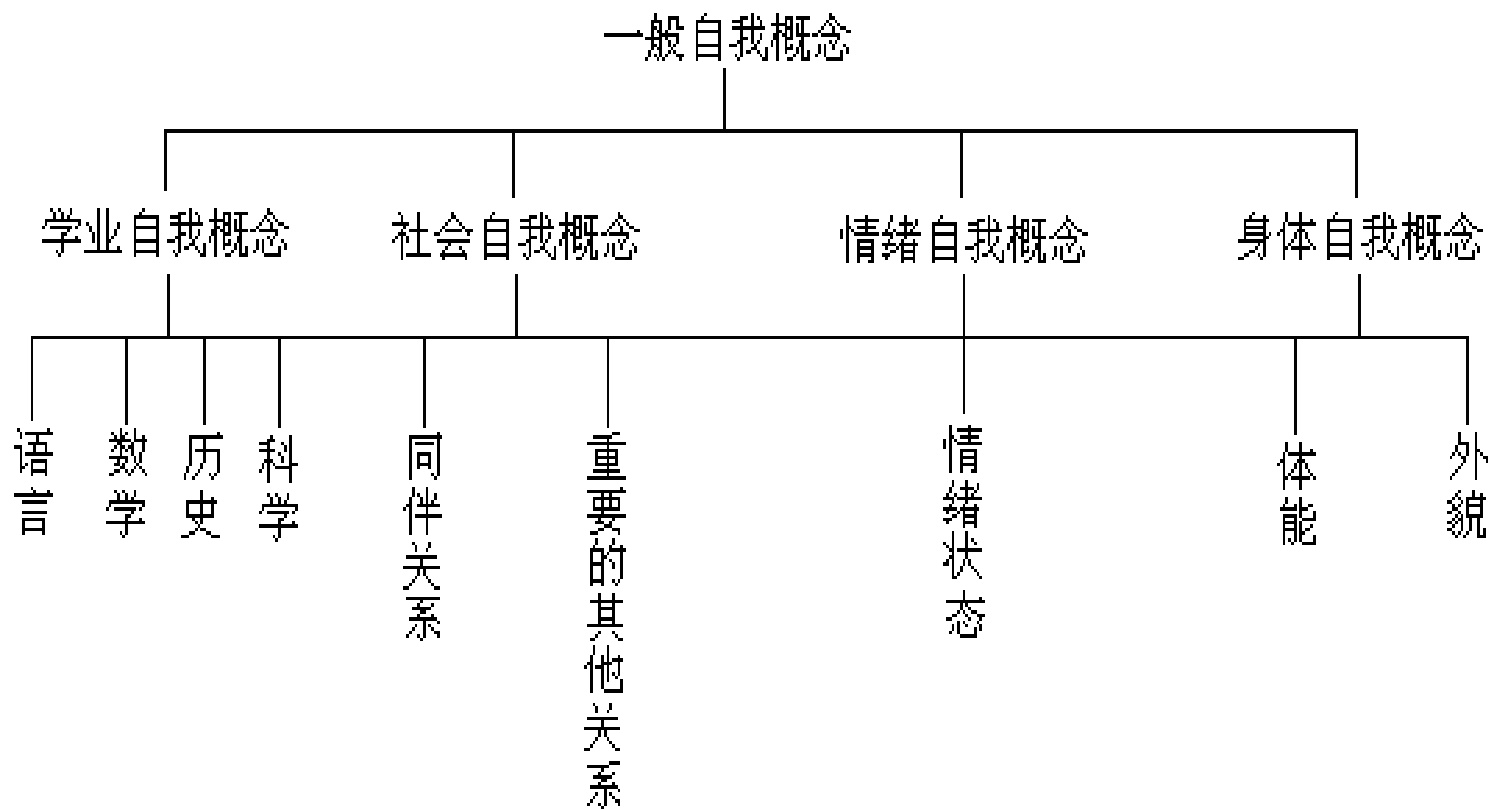
- 社会（与父母关系、与同学关系）

- 体能（力量、速度、技巧）

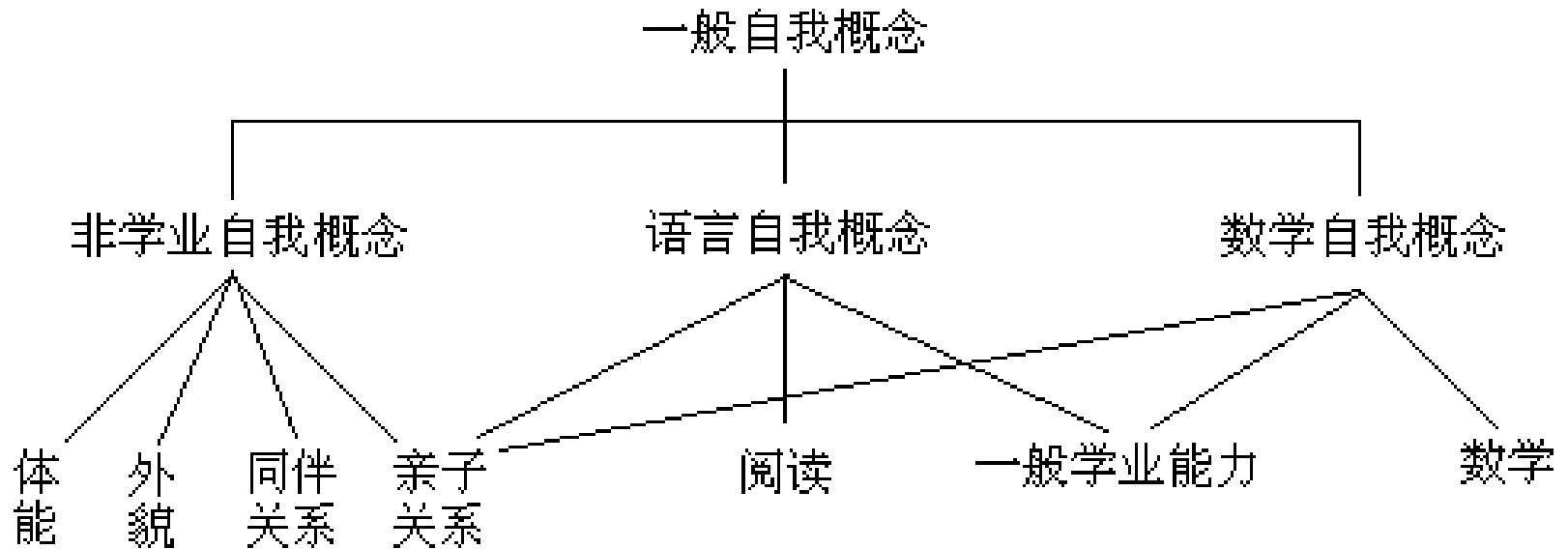
- 艺术（美术、音乐）

# Shavelson, Hubner和Stanton (1976)

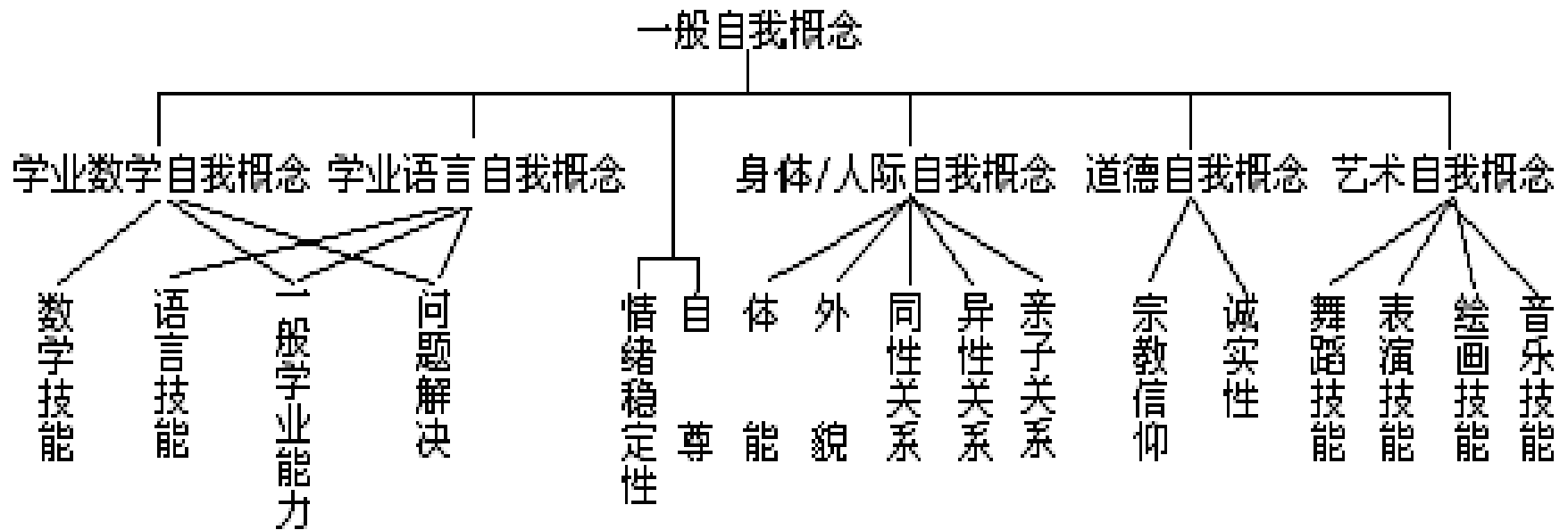
## 提出的自我概念多维度层次模型



# Marsh和 Shavelson (1985) 修订后的自我概念结构模型



# Vispoel (1995) 扩展的自我概念多维度层次理论模型





# 音乐自我概念

---

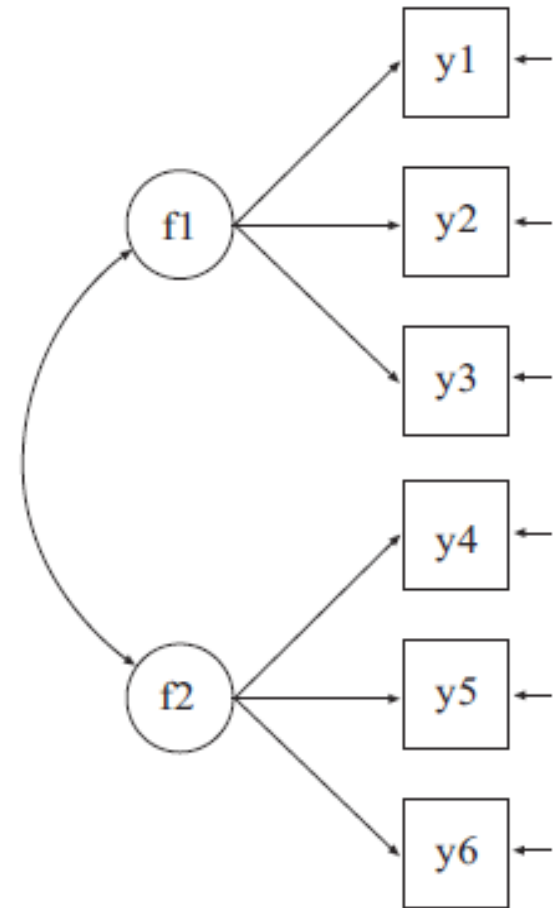
- 歌唱 (**Singing**)
- 乐器 (**Instrument Playing**)
- 读谱 (**Reading Music**)
- 作曲 (**Composing Music**)
- 辨音 (**Listening Skill**)
- 节拍 (**Moving to Music**)

# 典型CFA模型

典型的**CFA**是严格独立分群模型

**(Independent clusters model, ICM-CFA)**

每个指标只从属于一个因子





# CFA的Mplus程序

---

TITLE: this is an example of an comfirmatory factor analysis

DATA: FILE IS ex5.1.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y6;

MODEL: f1 BY y1-y3;

f2 BY y4-y6;

OUTPUT: STANDARDIZED;



# 原始解与完全标准化解

## MODEL RESULTS

		Estimate	S.E.	Two-Tailed Est./S.E.	P-Value
<b>F1</b>	<b>BY</b>				
Y1		1.000	0.000	999.000	999.000
Y2		1.126	0.099	11.368	0.000
Y3		1.019	0.089	11.482	0.000
<b>F2</b>	<b>BY</b>				
Y4		1.000	0.000	999.000	999.000
Y5		1.059	0.129	8.199	0.000
Y6		0.897	0.105	8.531	0.000
<b>F2</b>	<b>WITH</b>				
F1		-0.030	0.052	-0.582	0.560
<b>Variances</b>					
F1		0.907	0.125	7.254	0.000
F2		0.760	0.133	5.734	0.000

## STDYX Standardization

		Estimate	S.E.	Two-Tailed Est./S.E.	P-Value
<b>F1</b>	<b>BY</b>				
Y1		0.678	0.035	19.348	0.000
Y2		0.769	0.034	22.496	0.000
Y3		0.695	0.035	19.946	0.000
<b>F2</b>	<b>BY</b>				
Y4		0.609	0.045	13.676	0.000
Y5		0.707	0.046	15.391	0.000
Y6		0.604	0.044	13.580	0.000
<b>F2</b>	<b>WITH</b>				
F1		-0.036	0.062	-0.583	0.560
<b>Variances</b>					
F1		1.000	0.000	999.000	999.000
F2		1.000	0.000	999.000	999.000

# CFA的MPLUS程序

Title: The structure of burnout !标题。  
DATA: file is burnout.dat;!读入原始数据;  
VARIABLE: Names are district gender grade x1-x14;! 变量  
USEVARIABLES = x1-x14;! 用到的变量;  
ANALYSIS: ESTIMATOR = ML;! 默认的估计方法  
MODEL: f1 BY x8-x10;! 因子f1由指标x8-x10测量;  
          f2 BY x11 x12 x13 x14;  
          f3 BY x1-x7;  
OUTPUT: STANDARDIZED;! 输出标准化估计;  
          MODINDICES;!要求Mplus报告修正指数;  
!上述模型有如下设置为程序默认: ①为了模型识别, 每个因子的第一个题目的负荷默认为1; ②三个因子之间彼此相关; ③因子方差、题目误差方差和题目截距自由估计; ④题目误差不相关; ⑤题目为连续变量。

---

# OUTPUT

## SUMMARY OF ANALYSIS ! 数据及变量概述

Number of groups	1
Number of observations	2049
Number of dependent variables	14
Number of independent variables	0
Number of continuous latent variables	3

# OUTPUT

## MODEL FIT INFORMATION (拟合指数)

Number of Free Parameters 45

### Loglikelihood

H0 Value -38616.501  
H1 Value -38457.465

### Information Criteria

Akaike (AIC) 77323.002  
Bayesian (BIC) 77576.132  
Sample-Size Adjusted BIC 77433.163  
( $n^* = (n + 2) / 24$ )

## Chi-Square Test of Model Fit

Value 289.466\*  
Degrees of Freedom 74  
P-Value 0.0000  
Scaling Correction Factor 1.099  
for ML

## RMSEA (Root Mean Square Error Of Approximation)

Estimate 0.038  
90 Percent C.I. 0.033 0.042  
Probability RMSEA  $\leq$  .05 1.000

## CFI/TLI

CFI 0.969  
TLI 0.962

## Chi-Square Test of Model Fit for the Baseline Model

Value 6977.117  
Degrees of Freedom 91  
P-Value 0.0000

## SRMR (Standardized Root Mean Square Residual)

Value 0.032

## WRMR (Weighted Root Mean Square Residual)

Value 2.023

# OUTPUT

## STDYX Standardization !完全标准化

	Estimate	S.E.	Two-Tailed Est./S.E.	P-Value
F1 BY				
X8	0.604	0.022	27.910	0.000
X9	0.664	0.021	31.569	0.000
X10	0.734	0.019	39.276	0.000
F2 BY				
X11	0.728	0.016	44.879	0.000
X12	0.714	0.019	37.710	0.000
X13	0.663	0.020	32.398	0.000
X14	0.610	0.019	31.652	0.000

F3 BY				
X1	0.592	0.019	31.481	0.000
X2	0.540	0.021	26.116	0.000
X3	0.496	0.021	23.741	0.000
X4	0.601	0.019	31.144	0.000
X5	0.677	0.016	41.355	0.000
X6	0.701	0.016	44.048	0.000
X7	0.576	0.019	29.685	0.000
F2 WITH				
F1	0.494	0.024	20.517	0.000
F3 WITH				
F1	0.332	0.028	11.723	0.000
F2	0.568	0.019	29.489	0.000

# OUTPUT

## MODEL MODIFICATION INDICES (修正指数)

NOTE: Modification indices for direct effects of observed dependent variables regressed on covariates may not be included. To include these, request MODINDICES (ALL).

Minimum M.I. value for printing the modification index 10.000

	M.I.	E.P.C.	Std E.P.C.	StdYX	E.P.C.
--	------	--------	------------	-------	--------

### BY Statements

F1	BY X1	12.405	0.144	0.097	0.091
F1	BY X11	12.834	0.180	0.121	0.104
F2	BY X1	47.122	0.262	0.222	0.208
F2	BY X8	11.231	-0.136	-0.115	-0.104
F2	BY X9	17.515	-0.178	-0.151	-0.135
F2	BY X10	50.540	0.337	0.286	0.245
F3	BY X8	10.237	-0.148	-0.093	-0.084
F3	BY X10	14.293	0.194	0.122	0.105
F3	BY X13	12.135	-0.164	-0.103	-0.105

# CFA (固定方差)

Title: The structure of burnout

DATA: file is burnout.dat

VARIABLE: Names are district gender grade x1-x14;

USEVARIABLES = x1-x14; ;

ANALYSIS: ESTIMATOR = ML;

MODEL: f1 BY x8-x10\*1;

f2 BY x11 x12 x13 x14\*1;

f3 BY x1-x7\*1;

f1-f3@1;

f1 WITH f2\*.5;

# 类别变量CFA的Mplus程序

Title: The structure of burnout !标题。  
DATA: file is burnout.dat;!读入原始数据;  
VARIABLE: Names are district gender grade x1-x14;! 变量  
USEVARIABLES = x1-x14;! 用到的变量;  
CATEGORICAL are x1-x14;! 指标是类别变量;  
ANALYSIS: ESTIMATOR = ML;! 默认的估计方法  
MODEL: f1 BY x8-x10;! 因子f1由指标x8-x10测量;  
          f2 BY x11 x12 x13 x14;  
          f3 BY x1-x7;  
OUTPUT: STANDARDIZED;! 输出标准化估计;  
          MODINDICES;!要求Mplus报告修正指数;  
!上述模型有如下设置为程序默认: ①为了模型识别, 每个因子的第一个题目的负荷默认为1; ②三个因子之间彼此相关; ③因子方差、题目误差方差和题目截距自由估计; ④题目误差不相关。





# 探索与验证

---

- 探索性因子分析—测量了哪些东西？
  - 缺少文献和理论时的早期探索
  - 用专家法和访谈法等草拟大量题目
  - 做探索性因子分析，修订题目，逐步形成量表结构，得到因子
- 验证性因子分析—测量了这些东西吗？
  - 已有潜变量和用于测量的题目
  - 心目中有模型，验证数据是否拟合模型
  - 心目中有若干模型，看看哪个模型比较吻合数据
- 整合：使用ESEM分析测量模型  
(麦玉娇，温忠麟，**2013**，心理科学进展)

# 高阶因子模型Mplus程序

TITLE: this is an example of a second-order factor analysis

DATA: FILE IS ex5.6.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y12;

MODEL: f1 BY y1-y3;

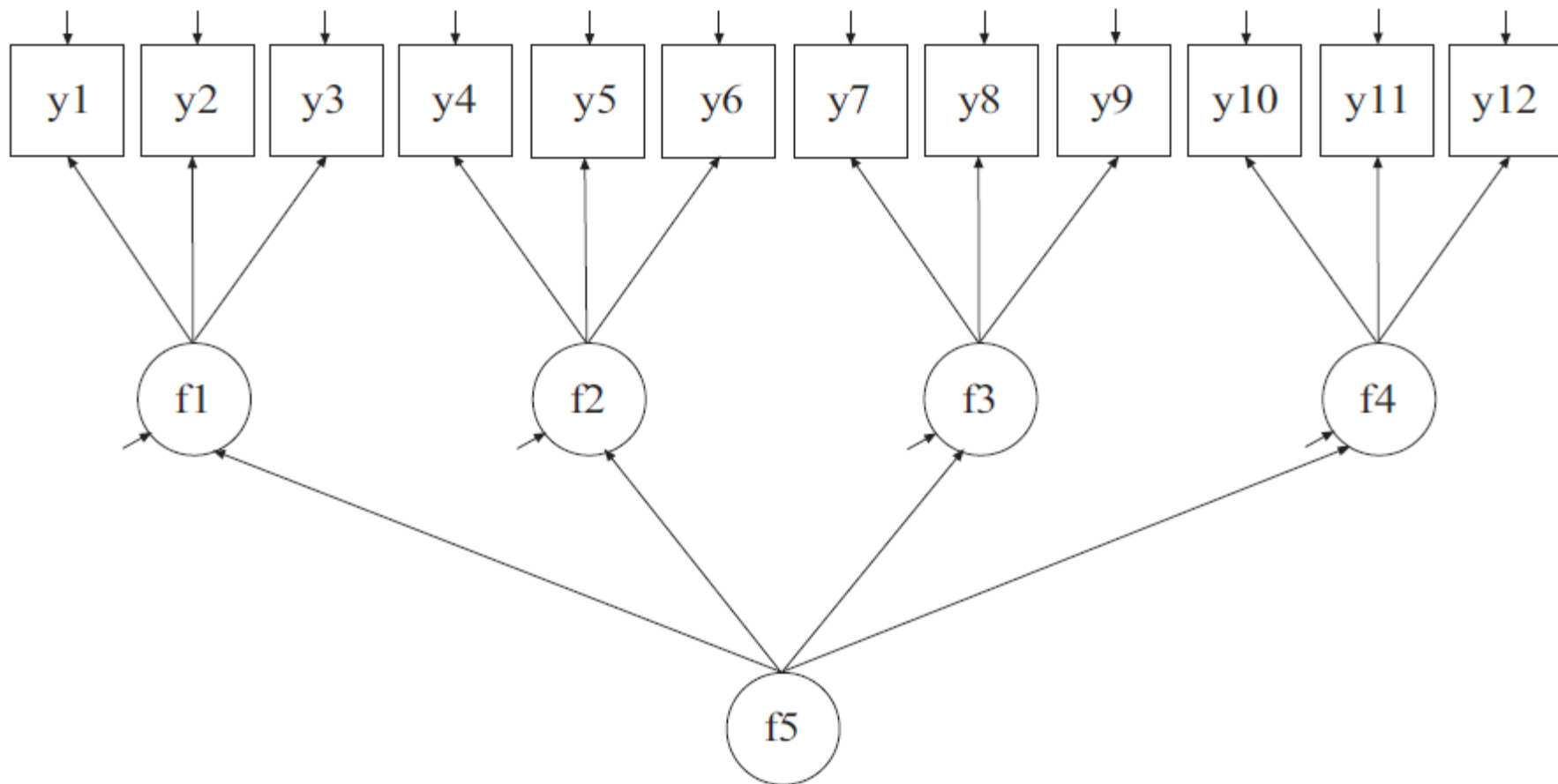
f2 BY y4-y6;

f3 BY y7-y9;

f4 BY y10-y12;

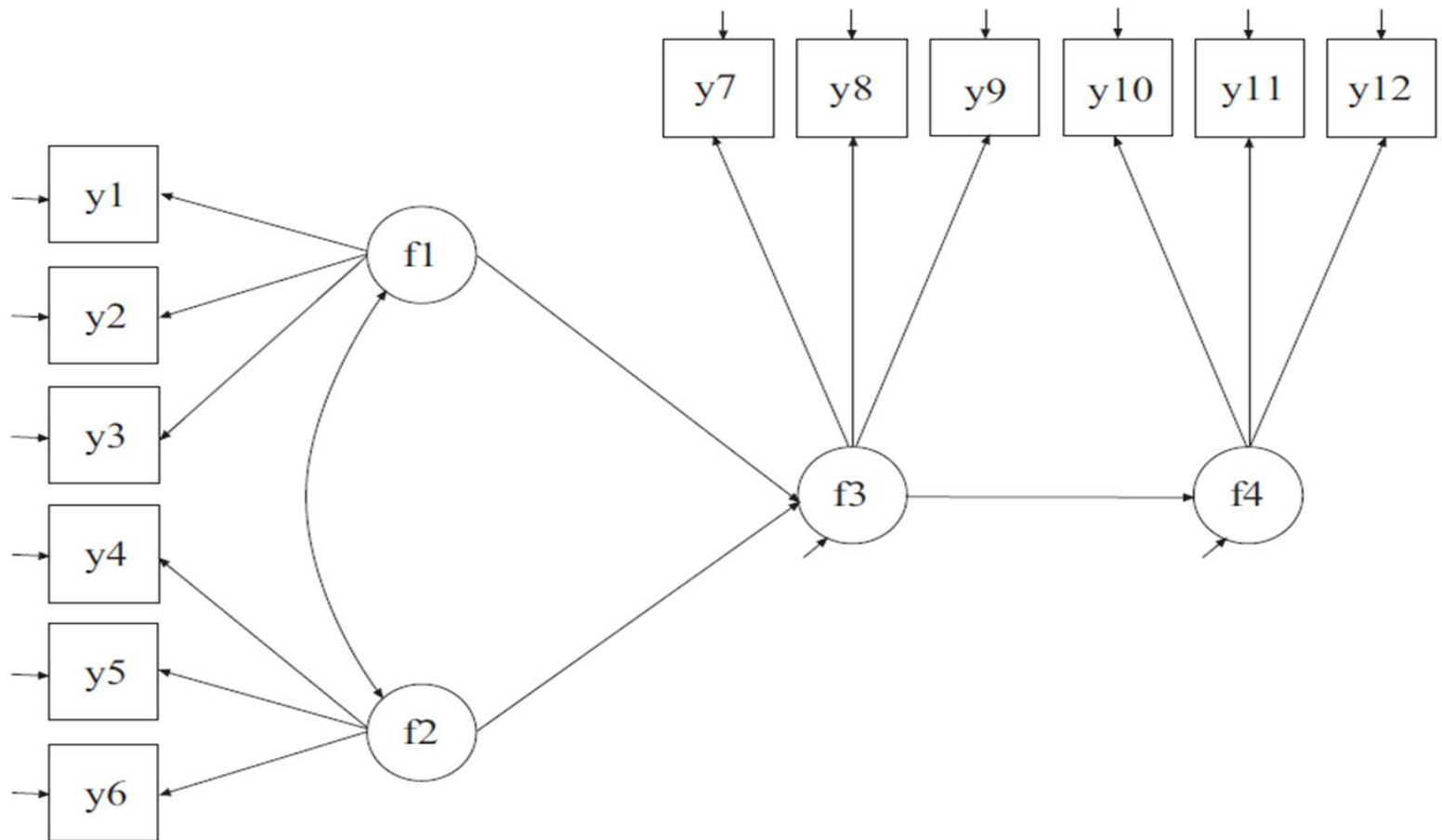
f5 BY f1-f4;

# 高阶因子模型



# 结构方程模型 (SEM)

- 结构方程模型包括测量模型和结构模型
- SEM = CFA + PA (in latent variable)



# 结构方程模型（SEM）

TITLE: this is an example of a SEM

DATA: FILE IS ex5.11.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y12;

MODEL: f1 BY y1-y3;

f2 BY y4-y6;

f3 BY y7-y9;

f4 BY y10-y12;

f4 ON f3;

f3 ON f1 f2;

# 均值结构

TITLE: this is an example of a mean structure CFA  
for continuous factor indicators

DATA: FILE IS ex5.9.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1a-y1c y2a-y2c;

MODEL: f1 BY y1a y1b@1 y1c@1;

f2 BY y2a y2b@1 y2c@1;

[y1a y1b y1c] (1);

[y2a y2b y2c] (2);

! 方括号表示截距，(1)表示第1个相等的限制，(2)表示第2个相等的限制

# 多组比较（无均值结构）

TITLE: this is an example of a multiple group CFA  
with covariates (MIMIC) with continuous factor indicators  
and no mean structure

DATA: FILE IS ex5.14.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y6 x1-x3 g;

GROUPING IS g (1 = male 2 = female);

ANALYSIS: MODEL = NOMEANSTRUCTURE;

INFORMATION = EXPECTED;

MODEL: f1 BY y1-y3;

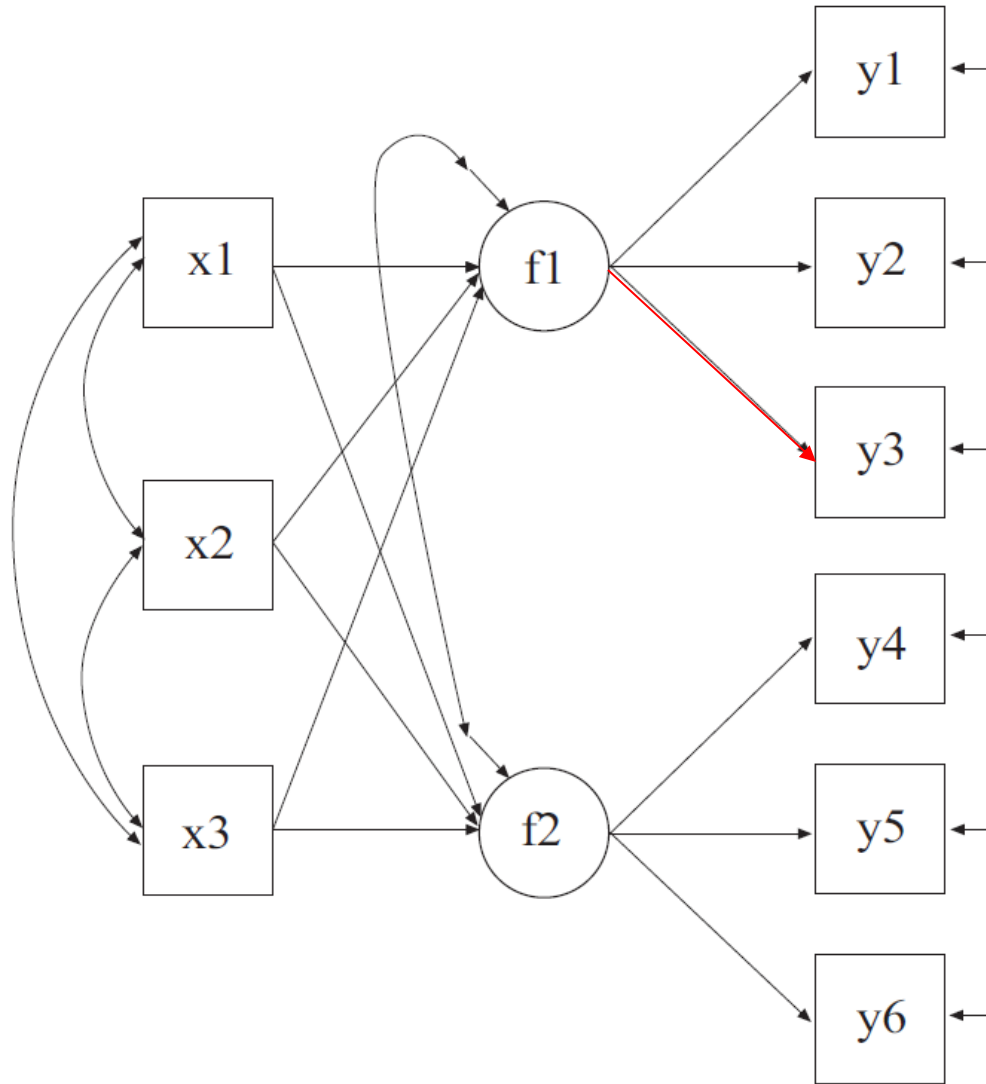
f2 BY y4-y6;

f1 f2 ON x1-x3;

MODEL female:

f1 BY y3;

! 第一个MODEL是公用的，里面的参数设定为跨组不变；MODEL female后面的参数是自由估计，即与male的各自自由估计y3在f1上负荷





## 多组比较（有均值结构）

TITLE: this is an example of a multiple group CFA  
with covariates (MIMIC) with continuous  
factor indicators and a mean structure

DATA: FILE IS ex5.15.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y6 x1-x3 g;

GROUPING IS g (1 = male 2 = female);

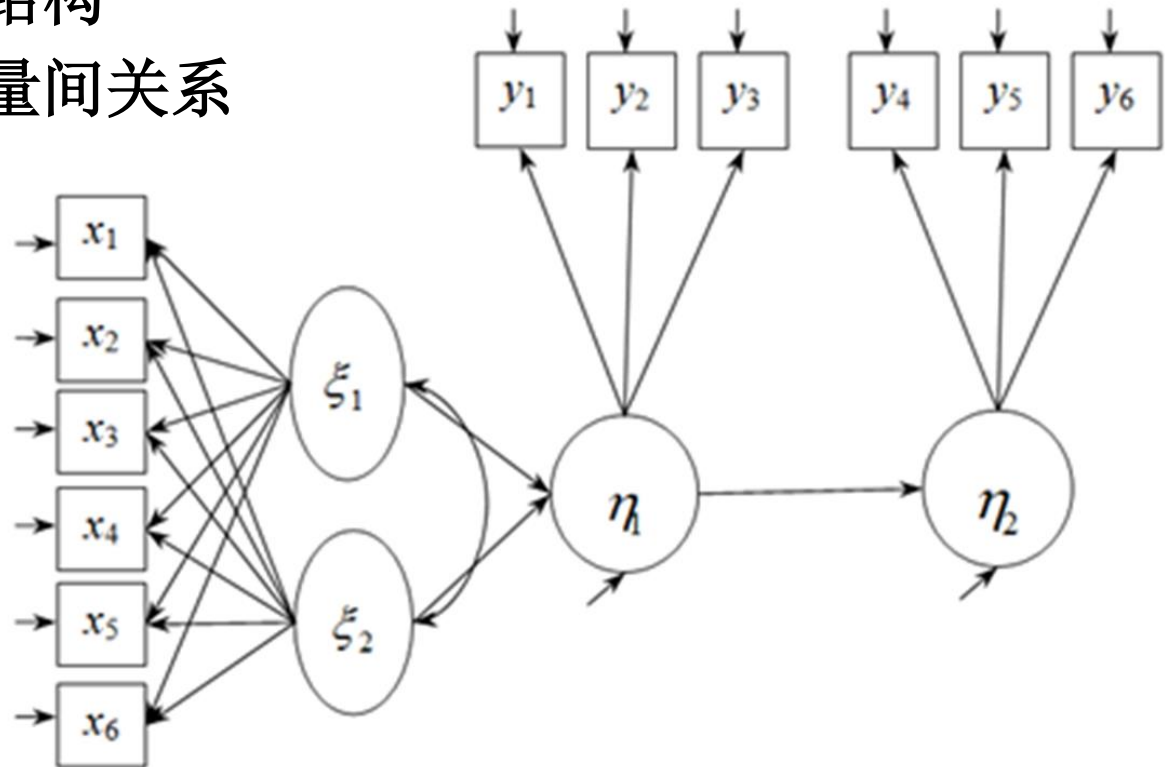
MODEL: f1 BY y1-y3;  
f2 BY y4-y6;  
f1 f2 ON x1-x3;

MODEL female:  
f1 BY y3;  
[y3];

- ! The intercepts of the factors ( $\kappa$ ) are fixed at zero in the first group and are free to be estimated in the other groups as the default.

# 探索性结构方程模型 (ESEM)

- 探索因子结构
- 验证因子结构
- 分析潜变量间关系



TITLE: this is an example of a SEM with EFA and CFA  
factors with continuous factor indicators

DATA: FILE IS ex5.25.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y12;

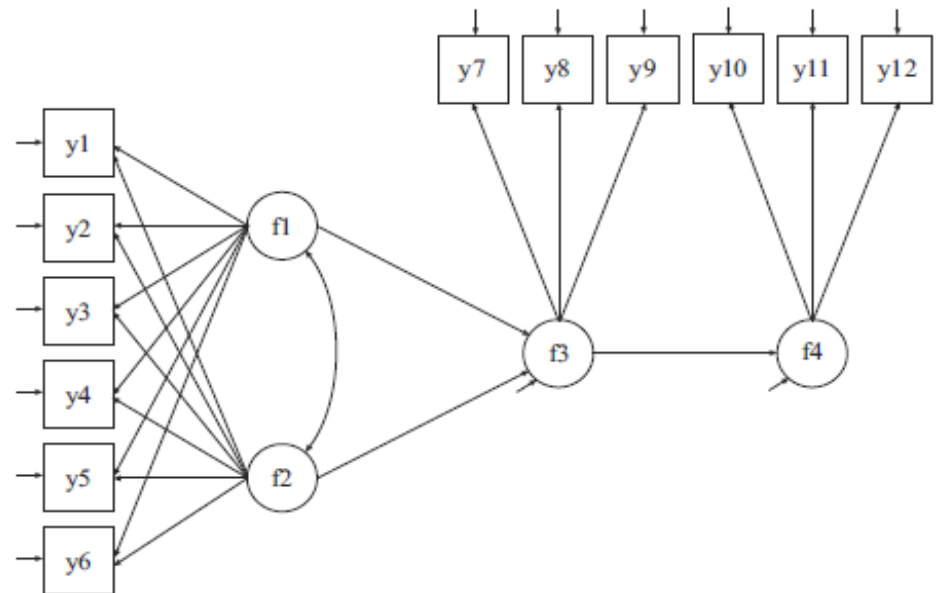
MODEL: f1-f2 BY y1-y6 (\*1);

f3 BY y7-y9;

f4 BY y10-y12;

f3 ON f1-f2;

f4 ON f3;





# 结构方程模型分析步骤

- 理论建模
- 参数估计
- 模型评价
- 模型修正
- 模型比较
- 结果解释



## 验证模型和产生模型

- 纯粹验证（strictly confirmatory, SC）

心目中只有一个模型，这类分析不多，无论接受还是拒绝，仍希望有更佳的选择

- 选择模型（alternative models, AM）

从拟合的优劣，决定那个模型最为可取，但我们仍常做一些轻微修改，成为MG类的分析

- 产生模型（model generating, MG）

先提出一个或多个基本模型，基于理论或数据，找出模型中拟合欠佳的部份；然后修改模型，通过同一或其他样本，检查修正模型的拟合程度，目的在于产生一个最佳模型



## 模型指定 (model specification)

### 指定

- 观测变量与潜变量（因子）的关系
- 各潜变量间的相互关系（指定哪些因子间有相关或直接效应）
- 在复杂的模型中，可以限制因子负荷或因子相关系数等参数的数值或关系（例如，2个因子间相关系数等于0.3；2个因子负荷必须相等）

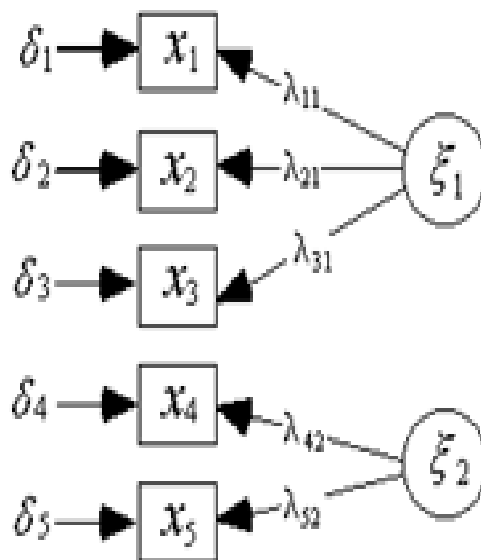


# 模型识别 (model identified)

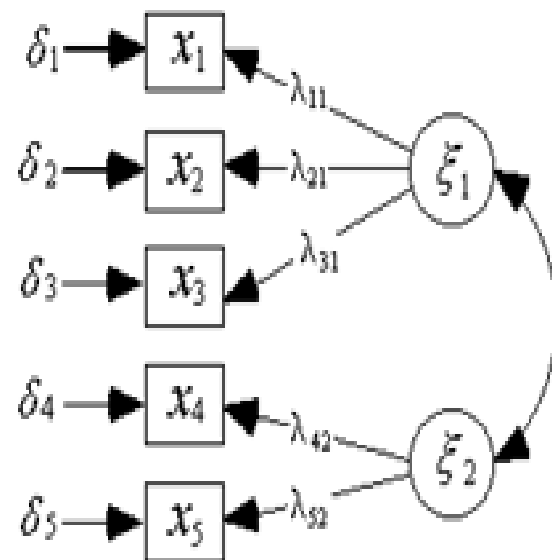
- 可识别

- 正好识别
- 超识别

- 不可识别



(a)



(b)



## 模型拟合

主要的是模型参数的估计。例如，回归分析，通常用最小二乘方法拟合模型，相应的参数估计称为最小二乘估计。但在SEM中，通常用极大似然法拟合模型。



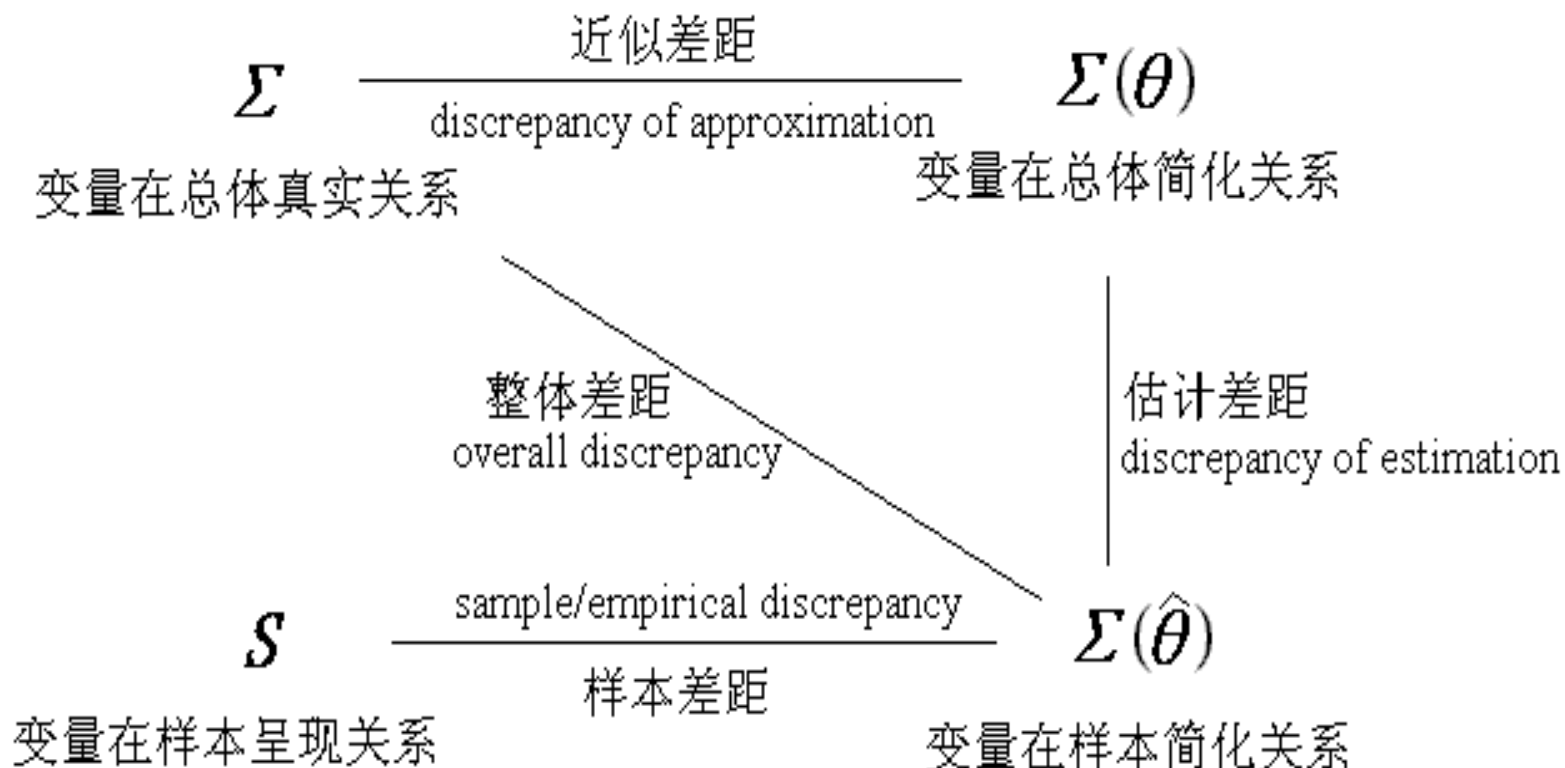


# 参数估计和拟合函数

- 目标是求参数使得模型隐含的协方差矩阵  $\Sigma(\theta)$  与样本协方差矩阵  $S$  “差距” 最小
- 这种“差距”称为拟合函数 (fit function)
- 有多种拟合函数, 参数估计值可能不同
  - 工具变量 (IV, instrumental variable);
  - 两阶段最小二乘 (TSLS, two-stage least squares);
  - 无加权最小二乘 (ULS, unweighted least squares);
  - 极大似然 (ML, maximum likelihood);
  - 广义最小二乘 (GLS, generalized least squares);
  - 一般加权最小二乘 (WLS, generally weighted least sq)
  - 对角加权最小二乘 (DWLS, diagonally weighted least sq)



## 四种协方差矩阵的关系





## 模型评价 (model assessment)

- 结构方程的解是否适当( proper), 估计是否收敛, 各参数估计值是否在合理范围内 (例如, 相关系数在 +1与-1之内)
- 参数与预设模型的关系是否合理。当然数据分析可能出现一些预期以外的结果, 但各参数绝不应出现一些互相矛盾, 与先验假设有严重冲突的现象
- 检视每一个测量模型的负荷
- 检视结构方程的 $R^2$
- 检视多个不同类型的整体拟合指数, 如 NNFI、CFI、RMSEA 和SRMR等 (Marsh, Hau, & Wen, 2014; 温忠麟, 侯杰泰, Marsh, 2014)



## 模型修正 (model modification)

- 删除不显著的路径系数
- 根据修正指数增加新的路径系数
- 删除题目或者重组题目
- 对每一模型，检查标准误、 $t$ 值、标准化残差、修正指数、参数期望改变值、及各种拟合指数，据此修改模型并重复步骤
- 这最后的模型是依据某一个样本数据修改而成，最好用另一个独立样本，交互确认 (cross-validate)

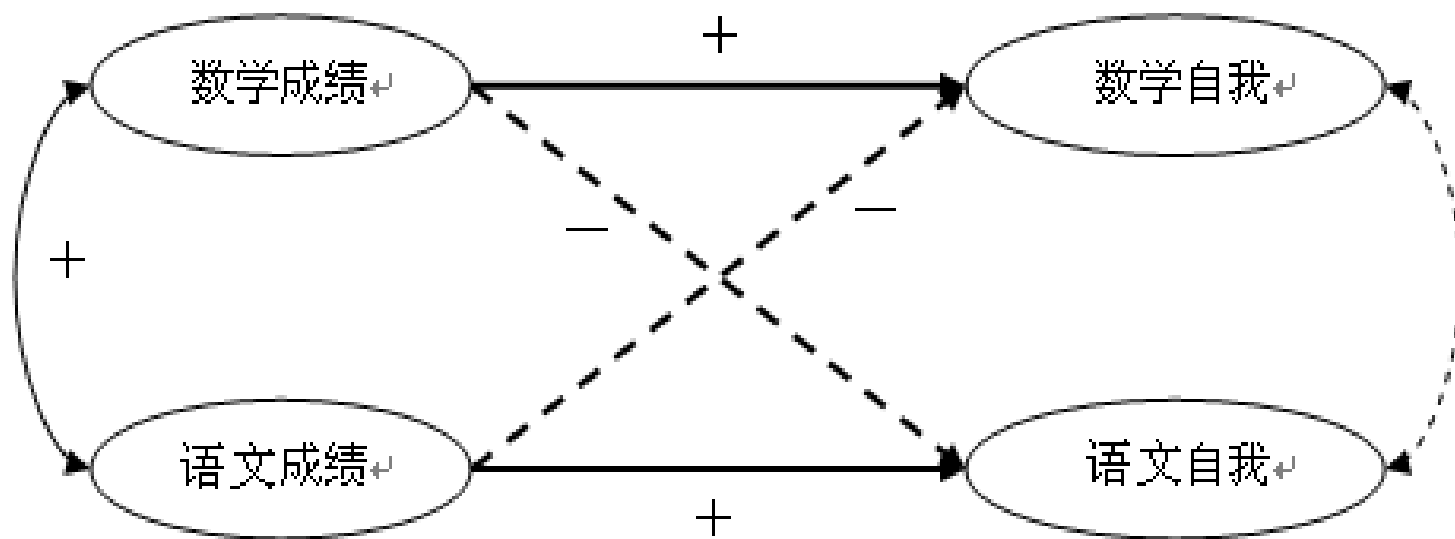


# 模型比较

- 嵌套模型比较
  - 多出的自由参数是否显著
  - 卡方检验（比较卡方之差与自由度之差）
  - 比较拟合指数的变化
- 非嵌套模型比较
  - 比较卡方与自由度的比值
  - 比较拟合指数
  - 比较模型的可解释性



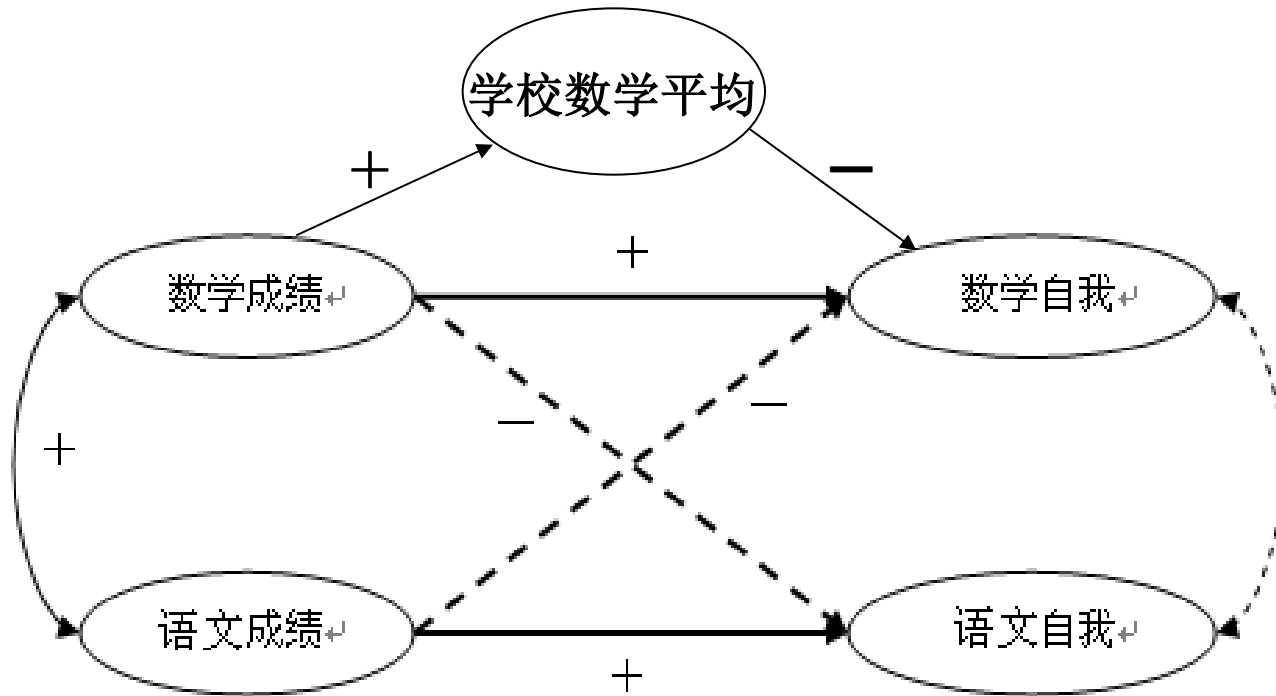
## 解释结果（以自我概念研究为例）



注释：“+”表示正相关或正面影响，“-”表示负相关或负面影响，实线表示显著，虚线表示不显著，弧形双箭头表示相关



## 解释结果（以自我概念研究为例）



注释：“+”表示正相关或正面影响，“-”表示负相关或负面影响，实线表示显著，虚线表示不显著，弧形双箭头表示相关



## 单指标信度

---

- 在CFA中，指标有下面方程

$$x = \lambda\xi + \delta \quad x = T + \delta$$

- 计算两边方差

$$\text{var}(x) = \text{var}(T) + \text{var}(\delta)$$

- 按信度定义计算

$$1 = \rho_{xx} + \frac{\text{var}(\delta)}{\text{var}(x)}$$

- 完全标准化时

$$\rho_{xx} = \lambda^2$$





## 单指标因子的参数设定

$$1 = \rho_{xx} + \frac{\text{var}(\delta)}{\text{var}(x)}$$

- 使用协方差矩阵时，将负荷固定为1，并将误差方差固定为（1-信度）×指标的方差（相当于将因子方差固定为信度×指标的方差）
- 使用相关矩阵时，可以简单地将负荷固定为信度的方根，而误差方差则固定为（1-信度）

# 单维测验合成信度

一个单维测验由  $p$  个题目  $x_1, x_2, \dots, x_p$  组成，测量了潜变量  $F$ ， $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$  为  $x_1, x_2, \dots, x_p$  的测量误差，则有

$$x_j = \lambda_j F + \delta_j$$

其中， $\lambda_j$  表示题目  $j$  在潜变量  $F$  上的负荷 ( $j = 1, 2, \dots, p$ )。假设合成总分是有意义的，整份测验  $X = x_1 + x_2 + \dots + x_p$  的合成信度为 (Brown, 2006; Raykov, 1998, 2002)

$$\rho_{\text{com}} = \text{var}\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j F\right) / \left[ \text{var}\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j F\right) + \sum_{j=1}^p \text{var}(\delta_j) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\delta_i, \delta_j) \right]$$

其中， $\text{cov}(\delta_i, \delta_j)$  表示题目  $i$  和题目  $j$  的误差协方差，如果题目误差不相关，则有

$$\rho_{\text{com}} = \text{var}\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j F\right) / \left[ \text{var}\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j F\right) + \sum_{j=1}^p \text{var}(\delta_j) \right]$$

# 计算单维测验合成信度的LISREL程序

DA NI=6 NO=300 MA=CM

CM SY

.....

MO NX=6 NK=1 TD=DI,FR AP=5

! AP=5 表示增加5个额外参数

PA LX

6(1)

CO PAR(1)=LX(1 1)+LX(2 1)+LX(3 1)+LX(4 1)+LX(5 1)+LX(6 1)

! PAR(1) 等于所有题目因子负荷的和

CO PAR(2)=TD(1 1)+TD(2 2)+TD(3 3)+TD(4 4)+TD(5 5)+TD(6 6)

! PAR(2) 等于所有题目误差方差的和

CO PAR(3)=PAR(1)^2

CO PAR(4)=PAR(2)+PAR(3)

CO PAR(5)=PAR(3)\*PAR(4)^-1

! PAR(5) 等于合成信度点估计值

OU ME=ML ALL ND=3

# 计算单维测验合成信度的Mplus程序

**DATA:** FILE IS p.dat;

**VARIABLE:** NAMES ARE x1-x6;

**MODEL:** F1 BY x1-x6\*(p1-p6);

x1-x6 (a1-a6);

F1@1;

**MODEL CONSTRAINT:**

new(H1-H4);

!H1-H4为新增参数

$H1=(p1+p2+p3+ p4+p5+p6)**2;$

!H1等于所有题目因子负荷的和的平方

$H2=a1+a2+a3+ a4+a5+a6;$

!H2等于所有题目误差方差的和

$H3=H1+H2;$

$H4=H1/H3;$

!H4等于合成信度点估计值

**OUTPUT:**

**CINTERVAL;**

!输出参数的置信区间

# 用SPSS和EXCEL计算单维测验合成信度

- 第一步，使用**SPSS**得到单因子负荷矩阵
- 第二步，在**EXCEL**中用下面公式计算合成信度

$$\rho_{\text{com}} = \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j \right)^2 / \left[ \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j \right)^2 + p - \sum_{j=1}^p \lambda_j^2 \right]$$

Factor Matrix<sup>a</sup>

	Factor
	1
x1	.532
x2	.450
x3	.536
x4	.832
x5	.689
x6	.839

# 双因子模型

设一个测验由  $p$  个题目  $x_1, x_2, \dots, x_p$  组成,

测量了一个全局因子  $G$  和  $n$  个局部因子  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ,

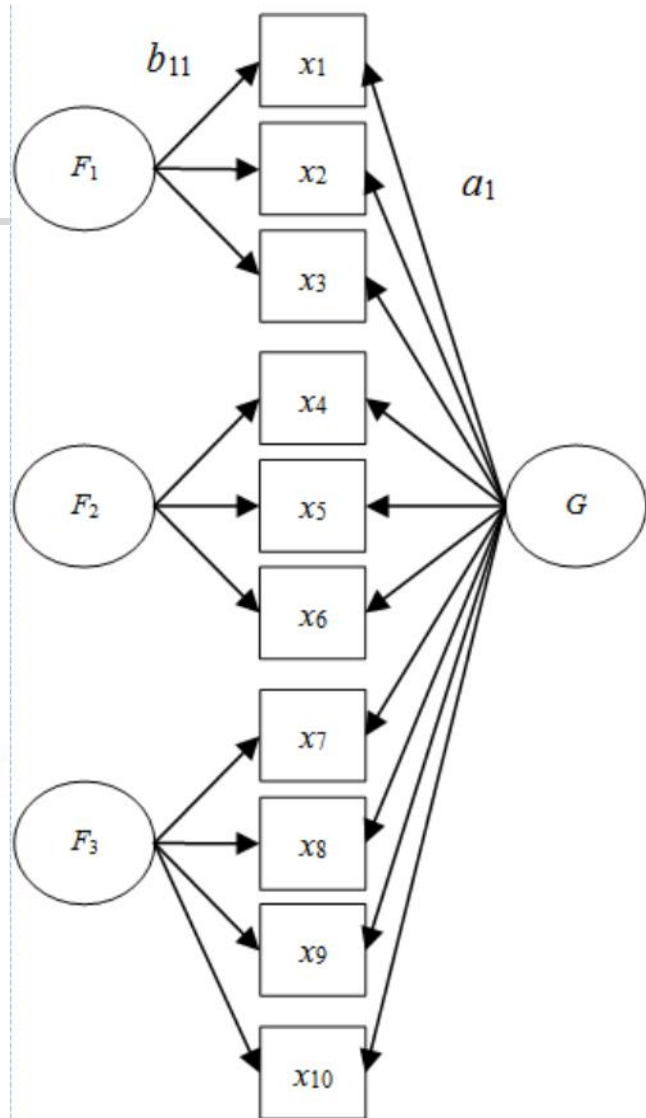
则题目  $x_i$  可以表示为:

$$x_i = a_i G + \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j + \delta_i, \quad i=1, 2, \dots, p$$

其中,  $a_i$  是题目  $x_i$  在全局因子  $G$  上的负荷,  $b_{ij}$  是题目

$x_i$  在局部因子  $F_j$  上的负荷,  $\delta_i$  是题目  $x_i$  的测验误差。

全局因子和局部因子正交不相关。全局因子和局部因子在因子分析中统称为公共因子(**common factor**) (顾红磊, 温忠麟, 2014, 心理科学)



# 用双因子模型计算同质性系数和合成信度

- 同质性系数(温忠麟, 叶宝娟, 2011; Rios & Wells, 2014)

$$\rho_{\text{hom}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)^2 \text{var}(G)}{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)^2 \text{var}(G) + \text{var}\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j\right) + \sum_{i=1}^p \text{var}(\delta_i)}$$

- 合成信度(温忠麟, 叶宝娟, 2011; Bentler, 2009)

$$\rho = \frac{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)^2 \text{var}(G) + \text{var}\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^p a_i\right)^2 \text{var}(G) + \text{var}\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j\right) + \sum_{i=1}^p \text{var}(\delta_i)}$$

# 计算同质性系数的Mplus程序（叶宝娟，温忠麟，2012）

DATA: FILE IS p.dat;

VARIABLE: NAMES ARE y1-y8;

MODEL: f1 BY y1-y8\*(p1-p8);

f2 BY y1-y4\*(p9-p12);

f3 BY y5-y8\*(p13-p16);

y1-y8 (a1-a8);

f1@1;

f2@1;

f3@1;

f1 with f2 @0;

f1 with f3 @0;

f2 with f3 @0;

MODEL CONSTRAINT:

new(H1-H4);

H1=(p1+p2+p3+p4+p5+p6+p7+p8)\*\*2;

H2=a1+a2+a3+a4+a5+a6+a7+a8+(p9+p10+p11+p12)\*\*2+(p13+p14+p15+p16)\*\*2;

H3=H1+H2;

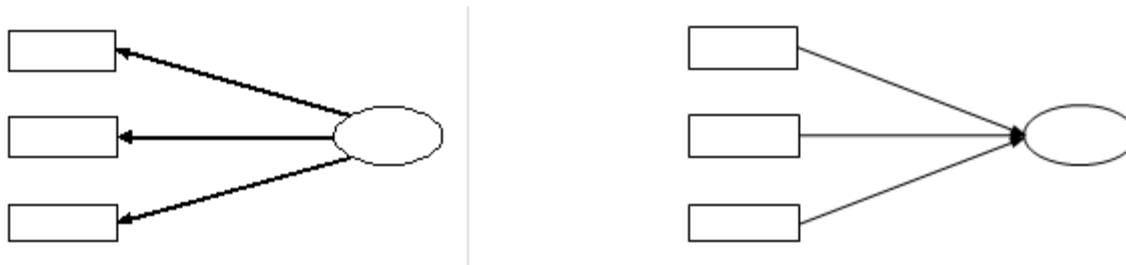
H4=H1/H3; !H4等于同质性信度点估计值

OUTPUT: CINTERVAL;



# 使用显变量还是潜变量

## ● 反映性测量与形成性测量



- 态度、信念等通常更适合使用反映性测量模型
- 压力性生活事件、社会经济地位等更适合使用形成性测量模型
- 变量并非生来就是反映性或者形成性的，与所用的测量量表有关

# 使用显变量还是潜变量

- 考虑测量信度（温忠麟，叶宝娟，**2011**；叶宝娟，温忠麟，**2011**，心理学报）
- 信度高可以使用合成分数（总分或者平均分）
- 多个维度合成总分，需要考虑同质性系数（叶宝娟，温忠麟，**2012**，心理学报）



## 使用显变量意味着...

---

将量表题目合成分代替潜变量来进行潜变量关系分析的做法（化潜为显），事实上可以理解成不考虑测量误差的形成性测量方法。

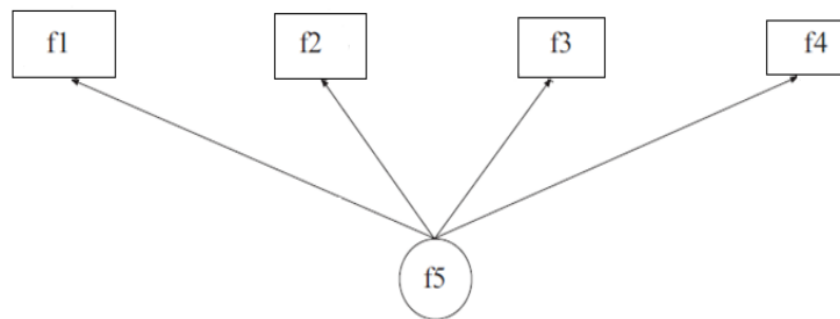
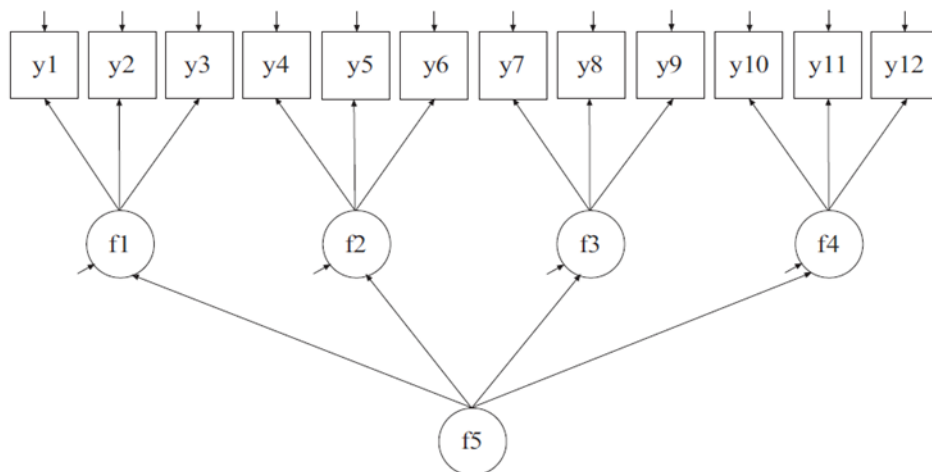
换一个角度还可以理解为不考虑测量误差的等负荷因子得分代替潜变量，属于反映性测量方法。

不管研究者应用时是做如何理解，化潜为显的分析结果并不会像研究者所宣称的那样形成性测量或反映性测量的误用（互用）会导致错误的结果。

# 题目打包

- 前提条件——单维、同质
- 适用范围——结构模型分析
- 不适用情形——测量模型分析
- 打包策略（吴艳，温忠麟，2011，心理科学进展）

打包建模介于高阶因子建模和显变量建模之间





# 如何验证因果关系

---

- 因果关系的建立和假设要在统计之前完成
- 因果推论准则(Cook & Campbell, 1979)
  - (1) 因和果共同变化;
  - (2) 因在果之前发生;
  - (3) 排除因果联系外的其他解释。
- 因果关系分析方法:
  - 理论分析进行因果推理
  - 实验设计验证因果关系
  - 追踪研究观察因果关系



# 因果验证：理论建模+数据分析

---

## ● 理论分析

- $X$ 是比 $Y$ 更加本质的（或者是长久的、稳定的）属性
- 颠倒 $X$ 和 $Y$ 的因果顺序，难以解释
- 尽可能排除 $X$ 和 $Y$ 的共同原因引起的虚假效应

## ● 建模依据

- 学科理论
- 文献信息
- 经验常识



## 关于因果证明的说明

---

- 所有方法都只能在一定程度上证实因果关系，其中实验设计是最为可靠的方法。
- 所有方法都不能证实，只能证伪，因果关系的确立最终还是要经过实践的检验。
- 通过研究，如果没有证伪，我们会增加对因果关系的信心。
- 这里所说的因果，包括直接因果和间接因果。还有，我们是在统计意义上谈论因果关系，只是集体规律，对个体可能无效。



---

谢谢大家